

# Stratégies pour la résolution de problèmes linéaires de grande taille

J. Y. COGNARD\*, P. VERPEAUX\*\*

\* Laboratoire de Mécanique des Structures Navales, ENSIETA,  
2 rue F. Verny, 29806 Brest Cedex 09

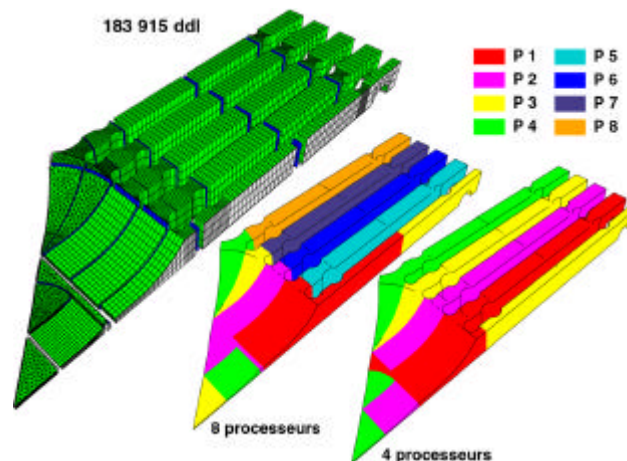
\*\* C.E.A. de Saclay, DMT/SEMTS/LAMS, 91191 GIF SUR YVETTE Cedex

Le calcul précis des contraintes et des déplacements dans les structures complexes nécessite la prise en compte d'une description détaillée de la géométrie. Ceci conduit souvent à l'utilisation de maillages raffinés, comportant un nombre important de nœuds. Pour un comportement élastique linéaire, la méthode des éléments finis nécessite alors la résolution de problèmes linéaires de grande taille. La prise en compte du comportement non linéaire des matériaux augmente fortement les coûts numériques des simulations, mais l'opération dont le coût augmente le plus rapidement avec le nombre de degrés de liberté est la résolution des problèmes globaux linéaires. Ainsi, pour un code de calcul Eléments Finis, le coût numérique associé à la simulation des problèmes linéaires de grande taille est un point très important.

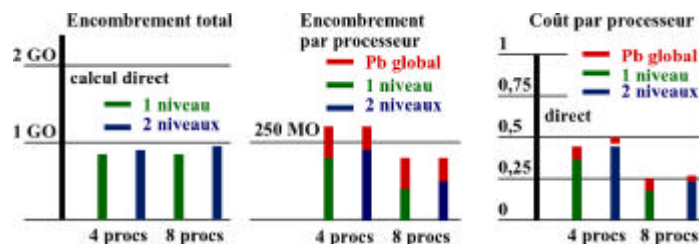
Une réduction de l'encombrement des matrices de rigidité est une façon de limiter les coûts numériques des simulations. Les techniques de type décomposition de domaines répondent à ce problème et sont adaptées à l'utilisation des ordinateurs à architecture parallèles. Une seconde approche possible consiste à rechercher des techniques de renumérotation des nœuds des maillages pour limiter l'encombrement en utilisant la structure creuse des matrices de rigidité. Ces techniques sont aussi compatibles avec le développement de solveurs parallèles.

Le comportement numérique de différentes stratégies est présenté dans le cas de simulations de structures élastiques à grand nombre de degrés de liberté (éprouvette biaxiale). Les calculs sont réalisés, sur des ordinateurs à architecture parallèle, avec le code CAST3M du CEA.

## Technique de sous structuration associée à une résolution directe du problème condensé



Eprouvette biaxiale et regroupement des sous domaines en fonction du nombre de processeurs

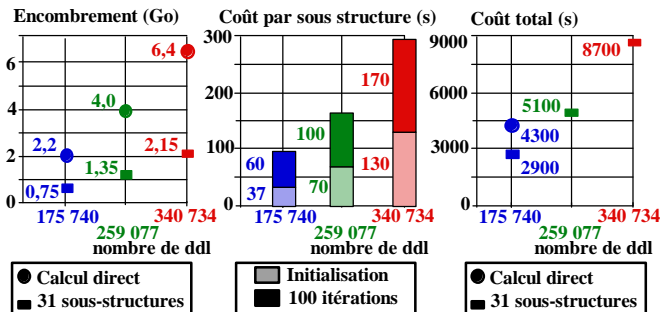


Encombrement et coût des différentes simulations (éprouvette biaxiale)

La condensation, par sous domaine, est réalisée par une technique de factorisation multi-frontale incomplète qui permet l'utilisation directe des modules du code Elément Finis. Le maillage, comportant 183 915 degrés de liberté, a été réalisé pour obtenir 31 sous domaines presque équilibrés, en utilisant les particularités de la géométrie. Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur IBM à 8 processeurs à mémoire partagée. Une technique à deux niveaux peut être utilisée pour réduire la taille du problème condensé, mais les calculs intermédiaires associés à la condensation du problème pour les groupes de sous domaines ne permet pas d'obtenir un gain significatif. Pour des ordinateurs à mémoire distribuée cette technique permet de limiter le volume des communications.

### Technique de sous structuration avec résolution itérative

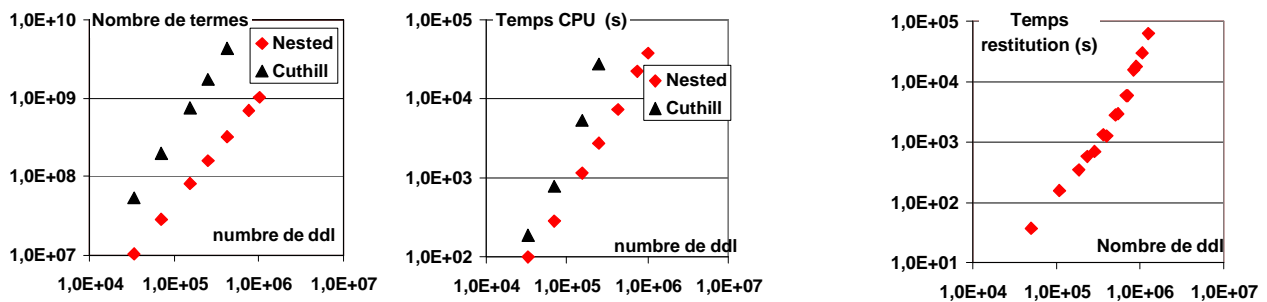
L'algorithme de résolution itératif utilisé comporte deux étapes. Des calculs indépendants sont réalisés sur chacune des interfaces et pour chaque sous domaine (ou sous structure), un problème global linéaire est à résoudre dont la matrice de rigidité est constante au cours des itérations. Une optimisation des échanges de données entre les processeurs permet d'obtenir un bon comportement de l'algorithme. De plus, en séquentiel, il permet de réduire les coûts par rapport à une résolution directe. Les résultats présentés ci-dessous, ont été obtenus sur IBM SP2 avec 16 processeurs à mémoire distribuée.



Encombremment et coût des différentes simulations (éprouvette biaxiale)

### Technique de renumérotation

Dans la version antérieure de Cast3M, la matrice avait un stockage de type ligne de crête et la numérotation était effectuée par une méthode de Cuthill Mac Kee inversée. Quand la taille des problèmes augmente, il est préférable d'utiliser un stockage de type creux et une numérotation de type « nested dissection ». Cette technique autorise la résolution de systèmes ayant plus de  $10^6$  inconnues sur des configurations économiques de type PC. Pour les ordinateurs à mémoire partagée, une version parallèle du solveur a été développée ; elle correspond à une technique de décomposition en sous domaine avec une résolution directe du problème condensé. Les résultats des calculs présentés ci-dessous, ont été obtenus sur IBM SP2 avec 4 processeurs à mémoire partagée.



Encombremment et coût des différentes simulations pour un cube

Eprouvette biaxiale

COGNARD J.Y., THOMAS F., VERPEAUX P., 2000

"An integrated approach to solving mechanical problems on parallel computers"  
 Advances in Engineering Software, 31, pp 885-899.

COGNARD J.Y., POULHALEC A., THOMAS F., VERPEAUX P., 2004

"A parallel environment and associated strategies in structural non-linear analysis",  
 Chapter 14, pp 323-352, "Progress In Engineering Computational Technology", Eds. B.H.V. TOPPING & C.A. MOTA SOARES, Saxe-Coburg Publications, ISBN 1-874672-22-9.